« Объёмы многогранников и тел вращения»

Работа учащихся в группах по карточкам.

Задачи по теме «Объёмы» подобраны из тестовых задач по математике

Задачи для группы №1.

1. Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите объём конуса
2. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите объём параллелепипеда, если его высота равна 4 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45^0 .
3. Найдите объём конуса, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ см вокруг своего катета.
4. Объём шара 228π $см^3$. Вычислите площадь поверхности шара.
5. Образующая и радиусы большего и меньшего основания усечённого конуса равны соответственно 13 см, 11 см, 6 см. Вычислите объём этого конуса.
6. Найдите объём правильной пирамиды, если боковое ребро равно 3см, а сторона основания – 4см.

Задачи для группы №2.

1. Основание пирамиды – квадрат. Сторона основания равна 20 дм, а её высота равна 21 дм. Найдите объём пирамиды.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5 см. Найдите объём цилиндра.
3. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Определите ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеда.
4. Найдите объём прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 6 см, ширина – 7 см, а диагональ – 11 см.
5. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Найдите боковую поверхность и объём цилиндра.
6. Объём шара 228π $см^3$. Вычислите площадь поверхности шара.

Тест по теме: «Объёмы геометрических тел»

1. Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса, на плоскость основания называется:
   А) образующей Б) высотой В) диагональю Г) диаметром
2. Гранью куба является: А) ромб Б) прямоугольник В) квадрат Г) параллелограмм

3.Сечение конуса, параллельной плоскости основания будет

А) круг Б) прямоугольный треугольник В) равнобедренный треугольник

4. Прямая призма, в основании которой лежит параллелограмм называется:
   А) куб Б) квадрат В) параллелепипедом Г) ромбом
5. Тело, состоящее из двух кругов, совмещенных параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов называется
   А)цилиндром Б) конусом В) шаром Г) сферой

6. Объём усеченной призмы равен :

А) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ Б) $V = S_{осн} H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$

7. Объём наклонной призмы равен:

А) V=abc Б) нет верного ответа В)V=SH Г) V=a^3

8. Объём шара выражается формулой:

А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{3}{4}\pi R^3$ В) $V = \frac{4}{3}\pi R^2$ Г) $V = \frac{4}{3}\pi R$

9. Объём конуса можно вычислить по формуле:

А) $V = \frac{1}{3} S$ Б) $V = \frac{1}{3} SH$ В) $V = \frac{1}{3} H$ Г) $V = SH$

10. Объём цилиндра вычисляется с помощью формулы:

А) V=abc Б) $V = \pi R^2 H$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) $V = \pi RH$

11. Прямая призма, в основании которой правильный многоугольник называется :

А) многогранником Б) параллелепипедом В) правильной Г) додекаэдром

12. Тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не больше данного от данной точки, называется:

А) сфера Б) шар В) окружность Г) эллипс

13. Отрезок, соединяющий вершину конуса с точками окружности основания, называется:

А) касательной Б) диаметром В) высотой Г) образующей

14. Границей шара является : А) сфера Б) круг В) радиус Г) овал

15. Тело, состоящее из круга и точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих эту точку с точками круга, называется:

А) цилиндром Б) усечённым конусом В) конусом Г) шаром

16. Объём усечённого конуса выражается формулой:

А) $V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн} H$ В) $V = \frac{1}{3} SH$ Г) V=abc

17. Объём параллелепипеда можно найти по формуле:

А) V=ab Б) V=ac В) V=bc Г) V=abc

18. Объём прямой призмы равен:

А) $V = S_{осн} H$ Б) $V = \frac{1}{3} S_{осн} H$ В) $V = \pi R^2 H$ Г) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

19. Объём куба можно вычислить по формуле:

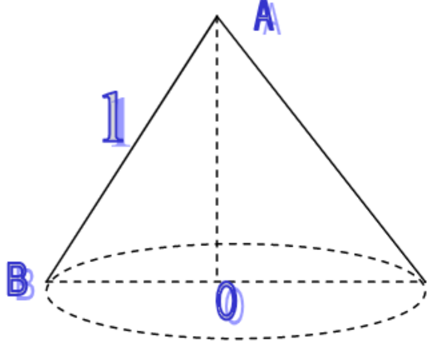
А) $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Б) $V = \frac{1}{3} SH$ В) $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$ Г) V=a^3

20. Объём пирамиды вычисляется с помощью формулы:

А) $V = \frac{1}{3} h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$ Б) $V = S_{осн} H$ В) V=abc Г) $V = \pi R^2 H$

I. Решение задач.

1. Образующая прямого конуса равна 4 см и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите объём конуса (В - №11 задание 7)



Дано:

Прямой конус

l=4 см – образующая

$\angle ABO = 30^0$

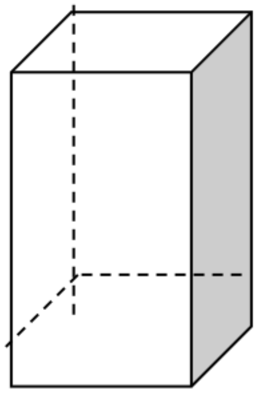
Найти: $V_{конуса}$

Решение:

1. $V_{конуса} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \pi \Re^2 \cdot H$
2. cos∠ABO= $\frac{BO}{AB}$ BO=R=AB*cos30^0= $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} см$
3. треугольник ABO –прямоугольный, напротив угла в 30^0 лежит катет, равный половине гипотенузы, отсюда следует, что H= 2 см
4. $V_{конуса} = \frac{1}{3} \pi (2\sqrt{3})^2 \cdot 2 = 8\pi$ см^3

Ответ: V=8 см^3

2. Основание прямоугольного параллелепипеда – квадрат. Найдите объём параллелепипеда, если его высота равна 4 см, а диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 45^0 . (В - №9 задание 16)



Дано:
$ABCДA_1B_1C_1Д_1$ прямой параллелепипед
ABCД - квадрат
BB_1 – высота
BB_1= 4м
$\angle B_1ДB=45^0$
Найти: $V_{параллелепипеда}$

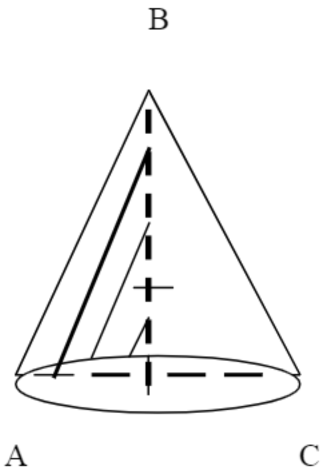
Решение:

1 V=abc=S*H
2 рассмотрим треугольник $B_1BД$;
а) треугольник $B_1BД$ – прямоугольный, так как $BB_1 \perp ABCД$,
б) $\angle B_1ДB=45^0$, отсюда следует $\angle ДB_1B=45^0$,$\Rightarrow$ треугольник $B_1BД$ - равнобедренный$\Rightarrow$ BB_1=BД=4 см
3 треугольник АВД – ьпрямоугольный , так как с вонованиии АВСД – квадрат и AB=AД
пусть AB=AД=a, по теореме Пифагора
$a^2+a^2=4^2$
$2a^2=16$
$a^2=8$
$a_1=2\sqrt{2}$ и a_2= - $2\sqrt{2}$ (посторонний корень)
4 $V = (2\sqrt{2})^2 \cdot 4 = 32$ см^3

Ответ: объём параллелепипеда равен 32 см^3

3. Найдите объём конуса, полученного вращением равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой $3\sqrt{2}$ см вокруг своего катета.

(В - №10 задание 27)



Дано:
Конус

Δ АОВ - прямоугольный, равнобедренный

$l = 3\sqrt{2} см$

Найти: $V_{кон}$

Решение:

1)

$$V_{кон} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$$

2) Δ АОВ - прямоугольный , равнобедренный $\Rightarrow$ АО=ВО, по т. Пифагора найдем R=ОА

Пусть АО = а, тогда

$a^2 + a^2 = (3\sqrt{2})^2$

$2a^2=18$

$a^2 = 9$

$a_1=3$ - радиус и высота

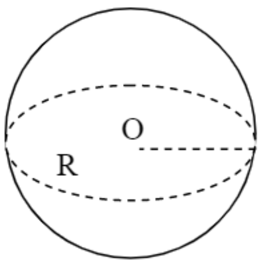
$a_2 = -3$ п. к.

3) $V_{кон} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi (см^3)$

Ответ: $V_{кон} = 9\pi (см^3)$

4. Объём шара 228π см^3. Вычислите площадь поверхности шара.

(В - №20 задание 11)



Дано:
шар

$V_{ш} = 288\pi\, см^3$

Найти: S пов-ти шара

Решение:

1) $V_{ш} = \frac{4}{3}\pi R^3$

2) $S_{пов.} = 4\pi R^2$

3)

$$288\pi = 4\pi R^3$$

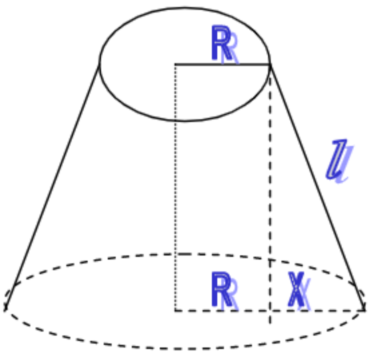
$$R^3 = 288 \cdot \frac{3}{4} = 216$$

$$R^3 = 216 \Rightarrow R = \sqrt[3]{216} = 6$$

4) $S_{пов.} = 4 \cdot \pi \cdot 6^2 = 144\pi \ (см^2)$

Ответ: $S_{пов.} = 144\pi \ (см^2)$

5. Образующая и радиусы большего и меньшего основания усечённого конуса равны соответственно 13 см, 11 см, 6 см. Вычислите объём этого конуса.
(В - №16 задание 23)



Дано:
Усечённый конус
R=6 см
R_1=11 см
l= 13см
Найти: V

Решение:

1) $V_{усеч.конуса} = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$, где S- площадь верхнего основания, S_1 - площадь нижнего основания, $S = \pi \cdot \Re^2$

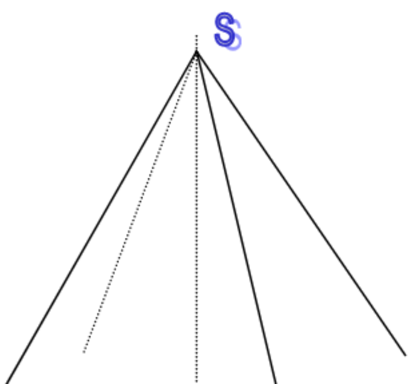
2) $x=R_1 – R=11-6=5$ (см)

3) найдём h по теореме Пифагора $h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см)

4) $V = \frac{1}{3} \cdot 12(\pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 11 \ + \sqrt{\pi \cdot 6 \ \cdot \pi \cdot 11^2}) = 4 \cdot (157\pi + 66\pi) = 892\pi$ ($см^3$)

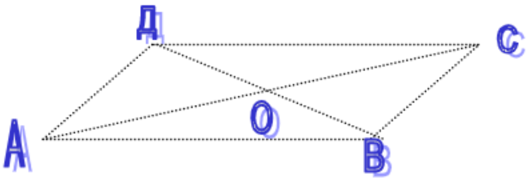
ответ: V= 892 $см^3$

6. Найдите объём правильной пирамиды, если боковое ребро равно 3см, а сторона основания – 4см. (В - №28 задание 13)



Дано:

SABCD- прав. $4^х$ уг. пирамида
ABCD- квадрат
SA=3 см, AB=4 см



SO- высота

Найти: V

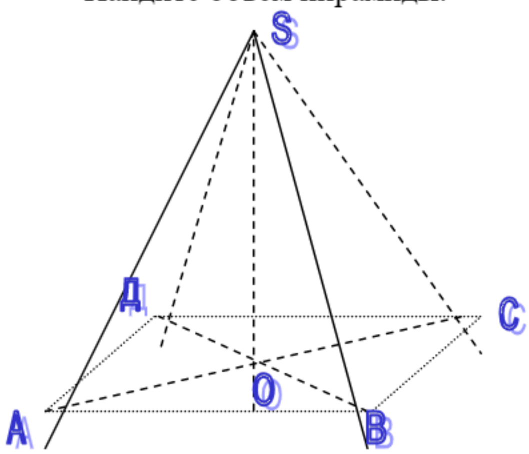
Решение:

1) $V_{пир} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$
2) $S_{осн} = 4^2 = 16\ (см^2)$
3) треугольник АВС – прямоугольный, АС= $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ см⇒АО=ОС= $2\sqrt{2}$
4) Н, высоту найдём из прямоугольного треугольника АОS,

   $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9-8} = 1$ см
5) V= $\frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 1 = 5\frac{1}{3}$ см^3

Ответ: объём усечённого конуса равен $5\frac{1}{3}$ см^3

1. Основание пирамиды – квадрат. Сторона основания равна 20 дм, а её высота равна 21 дм. Найдите объём пирамиды. (В - №8 задание 21)



Дано:

SABCD- прав. $4^х$ уг. пирамида,

АВСД – квадрат

SO – высота,

SO = 21дм

AB= 20 дм

Найти: V

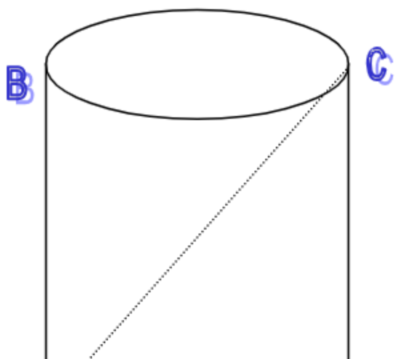
Решение:

1 $V_{пирамиды} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

2 $V_{пирамиды} = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 21 = 2800$ дм^3

Ответ: V=2800 дм^3

2. Диагональ осевого сечения цилиндра 13 см, высота 5 см. Найдите объём цилиндра. (В - №4 задание 14)



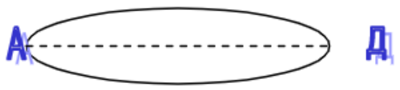
Дано:

Цилиндр

АВСД – осевое сечение

АС= 13 см

H=СД= 5 см
Найти: V



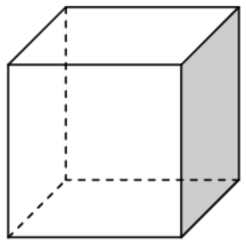
Решение:

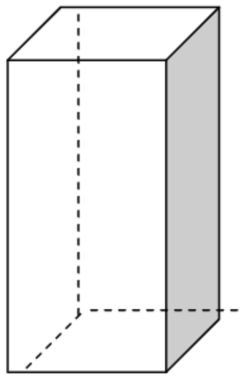
1) $V=S_{осн} \cdot H = \pi\Re^2 \cdot H$
2) Треугольник АСД – прямоугольный, по теореме Пифагора $\Rightarrow$
   $AД = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \Rightarrow$
3) АД=2R $\Rightarrow$R=6 см
4) $V = \pi\Re^2 \cdot H = \pi \cdot 6^2 \cdot 5 = 180\pi$ см[i]

Ответ: объём цилиндра равен 180π см^3

3. Измерения прямоугольного параллелепипеда 15 м, 50 м, 36 м. Определите ребро куба, равновеликого прямоугольному параллелепипеда. (В - №15 задание 19)

Куб





Дано:

куб, параллелепипед,
a=15 м
c=50 м
в=36 м.
$V_{куб} = V_{пар}$

Найти:
сторону куба

Решение:

1) $V_{пар\text{-}да}$=авс
   $V_{куба}=a^3$ $\qquad V_{пар\text{-}да}=V_{куб}$ (по условию)
2) $V_{пар\text{-}да}$=15*36*50=27000 см^3
3) $a=\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{27000} = 30 см$

Ответ: а куба= 30 см.

В-16 №23

Дано:
Усеч конус
R =6 см
R_1=11 см
l = 13 см
Найти:$V_{усеч\ конуса}$

Решение:

1) $V_{усечкон} = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$, S_1 – *нижнееоснование*, S – *верхнееоснование*, $S = \pi R^2$
2) $x=R_1-R$=11-6=5 (см)

3) Найдем h по т. Пифагора $h=\sqrt{l^2-x^2} = \sqrt{13^2-5^2} = 12$ (см)

4) $V = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot (\pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 11^2 + \sqrt{\pi \cdot 6^2 \cdot \pi \cdot 11^2} = 4 \cdot (157\pi + 66\pi) = 892\pi (см^3)$

Ответ: $V=892\pi$ см^3

Домашнее задание

Объемы тел вращения

1. Отрезок CD, концы которого лежат на разных окружностях оснований цилиндра, пересекает ось цилиндра под углом 60°. Найдите объем цилиндра, если CD=8 см

   а) 84 см^3 б) $72\sqrt{3}$ см^3 в) $36\sqrt{3}\pi$ см^3 г) 48π см^3

2. Объем цилиндра равен 60π см^3, а площадь осевого сечения 24 см^2. Найдите радиус основания цилиндра.

   а) $4\sqrt{2}$ см б) 6 см^3 в) 5 см г) 8 см

3. Плоскость, проходящая через вершину конуса и хорду CD основания, образует с основанием угол, равный 60°, и удалена от центра основания на 6 см. Найдите объем конуса, если длина хорды CD равна 4 см.

   а) $172\sqrt{3}\pi$ см^3 б) $180\sqrt{3}\pi$ см^3 в) 208π см^3 г) 192π см^3

4. Объем конуса равен 18π дм^3. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найдите высоту конуса.

   а) $3\sqrt[3]{2}$ дм б) $2\sqrt{2}$ дм в) $2\sqrt{3}$ дм г) $3\sqrt[3]{3}$ дм

5. Шар касается сторон треугольника МКР, причем МК = 4 см, МР = 5 см, КР = 7 см. Центр шара – точка О находится от плоскости треугольника МКР на расстоянии, равном $\sqrt{10}/2$ см. Найдите объем шара.

   а) 15π см^3 б) $^{32}/_3\,\pi$ см^3 в) 12π см^3 г) $8\sqrt{2}$ см^3

6. Равнобедренный треугольник с боковой стороной 10 см и углом при вершине 120° вращается вокруг оси, содержащей боковую сторону. Найдите объем фигуры вращения.

   а) 140π см^3 б) $140\sqrt{2}\,\pi$ см^3 в) $136\sqrt{3}\,\pi$ см^3 г) 250π см^3

7. Алюминиевый шар объемом 36π см^3 переплавили в равновеликий конус, образующая которого равна $3\sqrt{5}$ см. Найдите высоту этого конуса, если она не более 4 см.

   а) 2,5 см б) $\sqrt{10}$ см в) 3 см г) $2\sqrt{3}$ см

8. Внутри прямоугольного параллелепипеда лежит шар таким образом, что он касается трех граней, имеющих общую вершину. Найдите расстояние от центра шара до этой вершины, если объем шара равен $32\pi/3$ см^3.

а) $3\sqrt{3}$ см б) $2\sqrt{3}$ см в) $3\sqrt{2}$ см г) $2\sqrt{2}$ см

Объёмы многогранников.

1. Диагональ куба равна 15см. Найдите объём куба. А) $225\sqrt{3}см^3$ Б) $375\sqrt{3}см^3$ В) $625\sqrt{3}см^3$ Г) 450см^3

2. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 1дм и $2\sqrt{3}$ дм, а угол между ними равен 30^0. Найдите объём параллелепипед, если площадь большего сечения параллелепипеда равна $\sqrt{38}дм^2$.
А) $2\sqrt{2}дм^3$ Б) $4\sqrt{3}дм^3$ В) $3\sqrt{3}дм^3$ Г) $\sqrt{6}дм^3$

3. Все рёбра наклонного параллелепипеда равны, причём боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный 45^0. Меньшая диагональ основания равна $4\sqrt{2}см$, а один из углов 120^0. Найдите объём параллелепипеда, если меньшее диагональное сечение перпендикулярно основанию. А) $64\sqrt{3}см^3$ Б) 84 см^3 В) $72\sqrt{2}см^3$ Г) $84\sqrt{2}см^3$.

4. Диагональ боковой грани правильной треугольной призмы образует с основанием угол, равный 30^0. Найдите объём призмы, если площадь боковой поверхности призмы равна $72\sqrt{3}см^3$.
А) $120\sqrt{3}см^3$ Б) $84\sqrt{6}см^3$ В) $108\sqrt{2}см^3$ Г) $96\sqrt{6}см^3$

5. В основании прямой призмы СДЕК$С_1Д_1Е_1К_1$ лежит равнобедренная трапеция, ДЕ параллельна СК, причём ЕК=6 см, СК=10 СМ. Диагональ призмы $СЕ_1$ образует с основанием угол 45^0, а плоскости $СС_1Е_1$ и $КЕЕ_1$ перпендикулярны. Найдите объём призмы. А) $240\sqrt{3}см^3$ Б) 300 см^3 В) 272,8 см^3 Г) 245,76 см^3.

6. Диагональное сечение правильной четырёхугольной пирамиды является прямоугольным треугольником. Площадь которого равна 24 см^2. Найдите объём пирамиды.
А) $40\sqrt{3}см^3$ Б) $32\sqrt{6}см^3$ В) $48\sqrt{2}см^3$ Г) 54 см^3

7. В треугольной пирамиде MNKP $MN \perp MK$ и $MK \perp MP$, а угол PMN равен 60^0. Найдите объём пирамиды, если MN=$2\sqrt{3}см$, MK=12 см, PM=4 см.
А) 28см^3 Б) $18\sqrt{3}см^3$ В) 24 см^3 Г) $20\sqrt{6}см^3$

8. Через точку В бокового ребра пирамиды проведена плоскость, параллельная плоскости основания, причём объём образовавшейся усечённой пирамиды равен 372 см^3. Найдите объём пирамиды, если точка В делит ребро пирамиды в отношении 1:4, считая от вершины.
А) $240\sqrt{5}см^3$ Б) $300\sqrt{3}см^3$ В) 375 см^3 Г) 420 см^3