<u>Раздел: «Величины и их измерения»</u>

Тема: «Понятие величины»
План:

1. Понятие величины и ее свойства
2. Измерение положительной скалярной величины

1. Понятие величины и ее свойства

Первоначальное знакомство с величинами происходит в начальной школе, где величина наряду с числом является ведущим понятием.

Рассмотрим два высказывания, в которых используется слово «длина»:
1) Многие окружающие нас предметы имеют длину.
2) Стол имеет длину.

В первом предложении утверждается, что длиной обладают объекты некоторого класса. Во втором речь идет о том, что длиной обладает конкретный объект из этого класса. Термин «длина» употребляется для обозначения свойства либо класса объектов (предметы имеют длину), либо конкретного объекта из этого класса (стол имеет длину).

Но чем это свойство отличается от других свойств объектов этого класса? Так, например, стол может иметь не только длину, но и быть изготовленным из дерева или металла; столы могут иметь разную форму. О длине можно сказать, что разные столы обладают этим свойством в разной степени (один стол может быть длиннее или короче другого), чего не скажешь о форме - один стол не может быть «прямоугольнее» другого.

Таким образом, свойство «иметь длину» - особое свойство объектов, оно проявляется тогда, когда объекты сравнивают по их протяженности (по длине). В процессе сравнения устанавливают, что либо два объекта имеют одну и ту же длину, либо длина одного меньше (больше) длины другого.

Аналогично можно рассматривать и другие известные величины: площадь, массу, время и т.д. Они *представляют собой особые свойства окружающих нас предметов и явлений и проявляются при сравнении предметов и явлений по этому свойству, причем каждая величина связана с определенным способом сравнения.*

Величины, которые выражают одно и то же свойство объектов, называются *величинами одного рода* или *однородными величинами*. Например, длина стола и длина комнаты - это величины одного рода. Если величины выражают разные свойства объекта, то их называют *величинами разного рода*, или *разнородными величинами*. Так, например, длина и масса - это разнородные величины.

Основные свойства однородных величин.

1.Для величин одного рода имеют место отношения «равно», «меньше» и «больше», и для любых величин А и В справедливо одно и только одно из отношений: $A < B$, $A = B$, $A > B$.

Например, мы говорим, что длина гипотенузы прямоугольного треуголь-

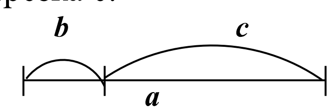
ника больше, чем длина любого катета этого треугольника, масса яблока меньше массы арбуза, а длины противоположных сторон прямоугольника равны.
2. Отношение «меньше» для однородных величин транзитивно: если $A < B$ и $B < C$, то $A < C$.

Так, если площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_2, и площадь треугольника F_2 меньше площади треугольника F_3, то площадь треугольника F_1 меньше площади треугольника F_3.
3. Величины одного рода можно складывать, в результате сложения получается величина того же рода. Иными словами, для любых двух величин A и B однозначно определяется величина $C = A + B$, которую называют суммой величин A и B.

Сложение величин коммутативно и ассоциативно. Например, если A - масса арбуза, а B - масса дыни, то $C = A + B$ – это масса арбуза и дыни. Очевидно, что $A + B = B+A$ и $(A + B) + C = A + (B + C)$.
4. Величины одного рода можно вычитать, получая в результате величину того же рода. Определяют вычитание через сложение.

Разностью величин A и B называется такая величина $C = A – B$, что $A = B + C$. Разность величин A и B существует тогда и только тогда, когда $A > B$.

Например, если A – длина отрезка a, B - длина отреза b, то $C = A - B$ - это длина отрезка c.



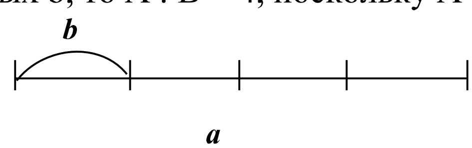
5. Величину можно умножать на положительное действительное число, в результате получают величину того же рода. Более точно, для любой величины A и любого положительного действительного числа x существует единственная величина $B = x \cdot A$, которую называют произведением величины A на число x.

Например, если A - время, отводимое на один урок, то умножив A на число $x = 3$, получим величину $B=3 \cdot A$ – время, за которое пройдет 3 урока.

6. Величины одного рода можно делить, получая в результате число. Определяют деление через умножение величины на число.

Частным величин A и B называется такое положительное действительное число $x = A: B$, что $A = x \cdot B$.

Так, если A - длина отрезка a, B – длина отрезка b и отрезок *a* состоит из 4 отрезков, равных b, то $A : B = 4$, поскольку $A = 4 \cdot B$.



2. Измерение положительной скалярной величины

Величины, как свойства объектов, обладают еще одной особенностью - их можно оценивать количественно. Для этого величину надо измерить. Чтобы осуществить измерение, из данного рода величин выбирают величину, которую называют единицей измерения. Мы будем обозначать ее буквой Е.

Если задана величина А и выбрана единица величины Е (того же рода), то **измерить величину А - это значит найти такое положительное действительное число х, что $A = x \cdot E$.**

Число x называется *численным значением величины* А при единице величины Е. Оно показывает, во сколько раз величина А больше (или меньше) величины Е, принятой за единицу измерения.

Если $A = x \cdot E$, то число x называют также *мерой величины* А при единице Е и пишут $\boldsymbol{x = m_E(A)}$.

Например, если А - длина отрезка a, Е - длина отрезка b , то $A = 4 \cdot E$. Число 4 - это численное значение длины А при единице длины Е, или, другими словами, число 4 - это мера длины А при единице длины Е.

В практической деятельности при измерении величин люди пользуются стандартными единицами величин: так, длину измеряют в метрах, сантиметрах и т.д. Результат измерения записывают в таком виде: 2,7 кг; 13 см; 16 с. Исходя из понятия измерения любую величину можно представить в виде произведения некоторого числа и единицы этой величины. Например, 2,7 кг = $2{,}7 \cdot 1$кг; 13 см = $13 \cdot 1$см; 16 с = $16 \cdot 1$с.

Используя это представление, можно обосновать процесс перехода от одной единицы величины к другой. Пусть, например, требуется выразить $\frac{5}{12}$ ч в минутах. Так как

$\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12} \cdot 1$ч и 1 час = 60 мин, то $\frac{5}{12}$ ч = $\frac{5}{12}.60$ мин = ($\frac{5}{12}.60$) мин =25 мин.

Величина, которая определяется одним численным значением, называется *скалярной величиной.* Кроме скалярных величин, в математике рассматривают ещё векторные величины. Для определения векторной величины необходимо указать не только её численное значение, но и направление. Векторными величинами являются сила, ускорение, напряжённость электрического поля и другие.

В начальной школе рассматриваются только скалярные величины.

Если при выбранной единице измерения скалярная величина принимает только положительные численные значения, то ее называют *положительной скалярной величиной*.

Положительными скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, время, стоимость и количество товара и др.

Измерение величин позволяет переходить от сравнения величин к сравнению чисел, от действий над величинами к соответствующим действиям над числами, и наоборот.

1. Если величины А и В измерены при помощи единицы величины Е, то отношения между величинами А и В будут такими же, как и отношения между их численными значениями, и наоборот:

$$A = B \Leftrightarrow m(A)=m(B);$$

$$A < B \Leftrightarrow m(A)<m(B);$$

$$A > B \Leftrightarrow m(A)>m(B).$$

Например, если массы двух тел таковы, что А =5 кг, В = 3 кг, то можно утверждать, что А > В, поскольку 5 > 3.

2. Если величины А и В измерены при помощи единицы величины Е, то для нахождения численного значения суммы А + В достаточно сложить численные значения величин А и В:

$$A + B = C \Rightarrow m(A + B)=m(A) + m(B).$$

Например, если А = 5 кг, В = 3 кг, то А + В = 5 кг + 3 кг = (5 + 3) кг = 8кг.

3. Если величины А и В таковы, что В = $x \cdot A$, где x - положительное действительное число, и величина А измерена при помощи единицы величины Е, то , чтобы найти численное значение величины В при единицы Е, достаточно число x умножить на число m(A):

$$B = x \cdot A \Rightarrow m(B)=x \cdot m(A).$$

Например, если масса В в 3 раза больше массы А и А = 2 кг, то В = 3А =3 $\cdot$(2 $\cdot$ 1кг) = (3 $\cdot$ 2)$\cdot$ 1кг = 6 кг.

В математике при записи произведения величины А на число х принято число писать перед величиной, т.е. $x \cdot A$. Но разрешается писать и так: $A \cdot x$. Тогда численное значение величины А умножают на х, если находят значение величины $A \cdot x$.

Рассмотренные понятия - объект (предмет, явление, процесс), его величина, численное значение величины, единица величины - надо уметь вычленять в текстах и задачах. Например, математическое содержание предложения «Купили 3 килограмма яблок» можно описать следующим образом: в предложении рассматривается такой объект, как яблоки, и его свойство - масса; для измерения массы использовали единицу массы - килограмм; в результате измерения получили число 3 - численное значение массы яблок при единице массы - килограмм.

Один и тот же объект может обладать несколькими свойствами, которые являются величинами. Например, для человека - это рост, масса, возраст и др. Процесс равномерного движения характеризуется тремя величинами: расстоянием, скоростью и временем, между которыми существует зависимость, выражаемая формулой s= vt.

Тема: «Длина отрезка. Величина угла»

План:

1. Длина отрезка и ее измерение.
2. Величина угла и ее измерение.

1. Длина отрезка и ее измерение

В геометрии длина - это величина, характеризующая протяженность отрезка, а также других линий (ломаной, кривой). При определении длины отрезка будем использовать понятие «отрезок состоит из отрезков».

Определение. ***Длиной отрезка называется положительная величина, обладающая следующими свойствами:***
1) равные отрезки имеют равные длины;
2) если отрезок состоит из двух отрезков, то его длина равна сумме длин его частей.

Эти свойства длины отрезка используются при ее измерении. Чтобы измерить длину отрезка, нужно иметь единицу длины. В геометрии такой единицей является длина произвольного отрезка.

Результатом измерения длины отрезка является положительное действительное число - его называют *численным значением длины отрезка* при выбранной единице длины или *мерой длины* данного отрезка. Если обозначить длину отрезка буквой X, единицу длины - Е, а получаемое при измерении действительное число - буквой a, то можно записать: $a = m_E(\mathrm{X})$ или $\mathrm{X} = a \cdot \mathrm{E}$.

Получаемое при измерении длины отрезка положительное действительное число должно удовлетворять ряду требований:

1.Если два отрезка равны, то численные значения их длин тоже равны.

2. Если отрезок x состоит из отрезков x_1 и x_2 ,то численное значение его длины равно сумме численных значений длин отрезков x_1 и x_2.

3. При замене единицы длины численное значение длины данного отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

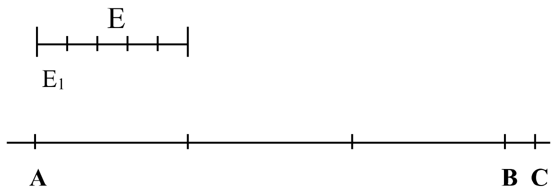
4. Численное значение длины единичного отрезка равно единице.

Доказано, что положительное действительное число, являющееся мерой длины заданного отрезка, всегда существует и единственно. Доказано также, что для каждого положительного действительного числа существует отрезок, длина которого выражается этим числом.

Заметим, что часто, ради краткости речи, численное значение длины отрезка называют просто длиной. Например, в задании «Найдите длину данного отрезка» под словом «длина» подразумевается численное значение длины отрезка. Не менее часто допускают и другую вольность - говорят: «Измерь отрезок» вместо «Измерь длину отрезка».

Задача. Построить отрезок, длина которого 3,2Е. Каким будет численное значение длины этого отрезка, если единицу длины Е увеличить в 3 раза ?
Решение. Построим произвольный отрезок и будем считать его единичным. Затем построим прямую, отметим на ней точку А и отложим от нее 3 отрезка,

длины которых равны Е. Получим отрезок АВ, длина которого 3Е.



Чтобы получить отрезок длиной 3,2Е, надо ввести новую единицу длины. Для этого единичный отрезок надо разбить либо на 10 равных частей, либо на 5, поскольку $0{,}2 = \frac{1}{5}$. Если от точки В отложить отрезок, равный $\frac{1}{5}$ единичного, то длина отрезка АС будет равна 3,2Е.

Чтобы выполнить второе требование задачи, воспользуемся свойством 3, согласно которому при увеличении единицы длины в 3 раза численное значение длины данного отрезка уменьшается в 3 раза. Разделим 3,2 на 3, получим: $3{,}2:3 = 3\frac{1}{5}:3 = \frac{16}{15} = 1\frac{1}{15}$. Таким образом, при единице длины 3Е численное значение длины построенного отрезка АС будет равно $1\frac{1}{15}$.

2. Величина угла и ее измерение

Каждый угол имеет величину. Специального названия для нее в геометрии нет.

__Определение__. ***Величиной угла называется положительная величина, определенная для каждого угла так, что:***
1) равные углы имеют равные величины;
2) если угол состоит из двух углов, то его величина равна сумме величин его частей.

Эти свойства лежат в основе измерения величины угла. Оно аналогично измерению длины отрезка и состоит в сравнении измеряемой величины угла с величиной угла, принятой за единицу. Единичный угол, а если нужно и его доли, откладываются на угле, величина которого измеряется. В результате получается численное значение величины угла или мера величины угла при данной единице измерения.

Число, которое получается в результате измерения величины угла, должно удовлетворять ряду требований - они аналогичны требованиям, предъявляемым к числовому значению длины отрезка.

На практике за единицу величины угла принимают градус - $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус записывают так: 1°. Величина прямого угла равна 90°, величина развернутого - 180°.

Градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. Одну минуту обозначают 1’, одну секунду - 1". Так, если мера величины угла равна 5 градусам 3 минутам и 12 секундам, то пишут 5°3' 12". Если нужна большая точность в измерении величин углов, используют и доли секунды.

Заметим, что часто вместо «величина угла» говорят «угол». Например, вместо «величина угла равна 45 градусам» говорят, что «угол равен 45 градусам».

На практике величины углов измеряют с помощью транспортира. Для более точных измерений пользуются и другими приборами.

Для численных значений величины угла выполняются свойства, аналогичные свойствам численных значений длин отрезков.

1. Если два угла равны, то меры их величин также равны, и обратно: если меры величин углов равны, то равны и сами углы.

2. Больший угол имеет большую меру, и обратно: если мера величины одного угла больше меры величины другого, то первый угол больше второго.

3. При сложении величин углов меры их складываются, а при вычитании – вычитаются.

Тема: «Площадь фигуры и ее измерение. Объем тела»

План:

1. ***Понятие площади фигуры. Измерение.***
2. ***Площадь многоугольника.***
3. ***Равновеликие и равносоставленные фигуры.***
4. ***Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение***
5. ***Объём тела и его измерение***

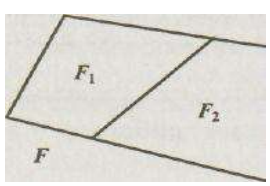
Цель занятия: обобщение материала, известного из школьного курса математики и именно того материала, который будет использован в профессиональной деятельности, т.к. такая величина как площадь фигуры изучается в начальном курсе младшими школьниками.

1. Понятие площади фигуры и ее измерение

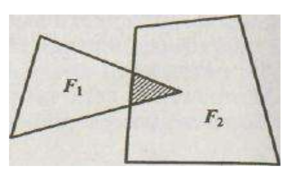
Каждый человек представляет, что такое площадь комнаты, площадь участка земли, площадь поверхности, которую надо покрасить. Он также понимает, что если земельные участки одинаковы, то площади их равны; что площадь квартиры складывается из площади комнат и площади других ее помещений.

Это обыденное представление о площади используется при ее определении в геометрии, где говорят о площади фигуры. Но геометрические фигуры устроены по-разному, и поэтому, ***когда говорят о площади, выделяют определенный класс фигур***. Например, рассматривают площадь многоугольника, площадь произвольной плоской фигуры, площадь поверхности многогранника и др. Будем рассматривать только площадь многоугольника и произвольной плоской фигуры.

Так же, как и при рассмотрении длины отрезка и величины угла, будем использовать понятие «состоять из», определяя его следующим образом: ***фигура F состоит (составлена) из фигур F_1 и F_2, если она является их объединением и у них нет общих внутренних точек.*** В этой же ситуации можно говорить, что фигура F разбита на фигуры F_1 и F_2.



а)



б)

Рис. 1

Например, о фигуре F, изображенной на рисунке 1а), можно сказать, что она состоит из фигур F_1 и F_2, поскольку они не имеют общих внутренних точек. Фигуры F_1 и F_2 на рисунке 1,6) имеют общие внутренние точки, поэтому нельзя утверждать, что фигура F состоит из фигур F_1 и F_2.

Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то пишут: $\mathbf{F = F_1 \oplus F2}$.

<u>Определение.</u> ***Площадью фигуры называется положительная величи-***

на, определенная для каждой фигуры так, что:
1) равные фигуры имеют равные площади;
2) если фигура состоит из двух частей, то ее площадь равна сумме площадей этих частей.

Если сравнить данное определение с определением длины отрезка, то увидим, что площадь характеризуется теми же свойствами, что и длина, но заданы они на разных множествах: длина - на множестве отрезков, а площадь – на множестве плоских фигур.

Чтобы измерить площадь фигуры, нужно иметь единицу площади. Как правило, такой ***единицей является площадь квадрата со стороной, равной единичному отрезку***. Часто математики место слов «нахождение площади» говорят «квадрирование». Условимся площадь единичного квадрата обозначать буквой **E**, а число, которое получается в результате измерения площади фигуры - **S(F).** Это число называют ***численным значением площади*** фигуры F при выбранной единице площади E.

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью единичного квадрата E. Результатом этого сравнения является число. Оно должно удовлетворять ***условиям***:

1. Число S(F) - положительное.
2. Если фигуры равны, то равны численные значения их площадей.
3. Если фигура F состоит из фигур F_1 и F_2, то численное значение площади фигуры равно сумме численных значений площадей фигур F_1 и F_2.
4. При замене единицы площади численное значение площади данной фигуры F увеличивается (уменьшается) во столько же раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.
5. Численное значение площади единичного квадрата принимается равным 1, т.е. S(E) = 1.
6. Если фигура F_1 является частью фигуры F_2, то численное значение площади фигуры F_1 не больше численного значения площади фигуры F_2, т.е. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow S(F_1) \leq S(F_2)$.

В геометрии доказано, что для многоугольников и произвольных плоских фигур такое число всегда существует и единственно для каждой фигуры.

В практической деятельности для измерения площадей пользуются следующими единицами:

$$1\ мм^2 \underbrace{\quad}_{100} 1\ см^2 \underbrace{\quad}_{100} 1\ дм^2 \underbrace{\quad}_{100} 1\ м^2 \underbrace{\quad}_{100} 1\ а \underbrace{\quad}_{100} 1\ га \underbrace{\quad}_{100} 1\ км^2$$

При переходе от одной квадратной единицы к другой сторона квадрата увеличивается в 10 раз, поэтому площадь увеличивается в 100 раз.

1 ар (***квадрат со стороной 10 м***) и **1 гектар** (***квадрат со стороной 100 м***) – это промежуточные квадратные единицы. Они введены для удобства в связи с измерением земельных участков. Ар частоназывают **соткой.**

Названия единиц измерения всегда произносят полностью.

Единицы площади претерпели изменения в процессе исторического развития. Например, было время когда в качестве единиц площади выступали: колодец (площадь, которую можно полить из одного колодца), соха или плуг (средняя площадь, обработанная за день сохой или плугом) и др. В старину также площади земельных участков измеряли в десятинах (это площадь квадрата со стороной, равной десятой части версты). В настоящее время существует Международной системы единиц (СИ).

2. Площадь многоугольника

Формулы для вычисления площади прямоугольника, треугольника, параллелограмма были выведены давно. В геометрии их обосновывают, исходя из определения площади, при этом численное значение называют площадью, а численное значение длины отрезка – длиной.

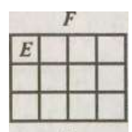
Теорема. ***Площадь прямоугольника равна произведению длин соседних его сторон.***

Слово «площадь» в этои формулировке означает численное значение площади, а слово «длина» – численное значение длины отрезка.

Доказательство. Если F–данный прямоугольник, а числа a, b – длины его сторон, то S(F)=a·b. Докажем это.

Пусть a и b - натуральные числа. Тогда прямоугольник F можно разбить на единичные квадраты : F=E ⊕ E ⊕ E ⊕ ... ⊕ E. Всего их a·b, так как имеем b рядов, в каждом из которых a квадратов. Отсюда S(F) = $\underbrace{S(E)+S(E)+\dots+S(E)}_{ab\ слагаемых}$=

= a·b·$\underbrace{S(E)}_{1}$ =a·b.



b

Пусть теперь a и b - положительные рациональные числа: a = $\frac{m}{n}$, b = $\frac{p}{q}$,

где *m,n, p, q* - натуральные числа.

Приведем данные дроби к общему знаменателю: a=$\frac{mq}{nq}$, b = $\frac{np}{nq}$.

Разобьем сторону единичного квадрата E на *nq* равных частей. Если через точки деления провести прямые, параллельные сторонам, то квадрат E разделится на $(nq)^2$ более мелких квадратов. Обозначим площадь каждого такого квадрата E_1. Тогда S(E) = $(nq)^2 \cdot S(E_1)$, а поскольку S(E) = 1,то $S(E_1) = \frac{1}{(nq)^2}$.

Так как a =$\frac{mq}{nq}$, b = $\frac{np}{nq}$, то отрезок длиной $\frac{1}{nq}$ укладывается на стороне a точно mq раз, а на стороне b - точно *np* раз. Поэтому данный прямоугольник F будет состоять из *mq·np* квадратов E_1. Следовательно,

$$S(F) = mq \bullet np \bullet S(E_1) = mq \bullet np \bullet \frac{1}{(nq)^2} = \frac{mq}{nq} \cdot \frac{np}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = a \cdot b.$$

Таким образом, доказано, что если длины сторон прямоугольника выражены положительными рациональными числами a и b, то площадь этого прямоугольника вычисляется no формуле **S(F) = a ·b.**

Случай, когда длины сторон прямоугольника выражаются положительными действительными числами, мы опускаем.

Следствие: ***площадь квадрата $S = a^2$***.

Из этой теоремы вытекает ***следствие***: ***площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов***.

Теорема. ***Площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, проведенную к этой стороне.***

Доказательство. Пусть ABCD - параллелограмм, не являющийся прямоугольником . Опустим перпендикуляр CE из вершины C на прямую AD. Тогда S(ABCE) = S(ABCD) + S(CDE).

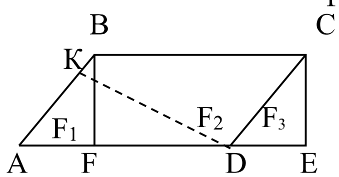
Опустим перпендикуляр BF из вершины B на прямую AD. Тогда S(ABCE) = S(BCEF) + S(ABF).

Так как треугольники ABF и CDE равны, то равны и их площади.

Отсюда следует, что S(ABCD)= S(BCEF), т.е. площадь параллелограмма ABCD равна площади прямоугольника BCEF и равна BC ·BF, а так как BC = AD, то S(ABCD) = AD ·BF.

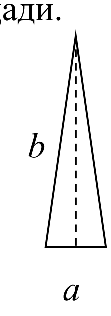
Вопрос: Это единственная формула площади для данного параллелограмма?

Ответ: Если провести высоту DK к меньшей стороне, то площадь параллелограмма ABCD можно вычислить по формуле ***S(ABCD) =DK·AB***.



Из этой теоремы вытекает ***следствие***: ***площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту***.

В египетских папирусах, например, предлагается находить площадь равнобедренного треугольника как произведение половины основания на боковую сторону, хотя для любого равнобедренного треугольника с малым углом при вершине, противоположной к основанию такой способ дает приближенное значение площади.



$$S = \frac{1}{2} ab$$

Формула нахождения площади треугольника не единственна. На сегодняшний день существует несколько формул, в частности формула Герона, формула, связанная с синусом угла и т.д. Можно использовать любую из них.

S=$\frac{1}{2}ab\sin\alpha$ *(a,b– длины сторон, α – угол между ними)*

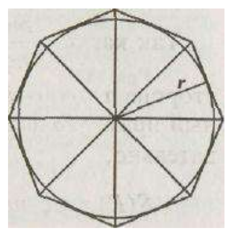
S=$\sqrt{p(p-a)(p-в)(p-c)}$ (p– полупериметр, а,в,с – длины сторон)

Определение. ***Фигуры, у которых площади равны, называются равновеликими.***

Заметим, что слова «сторона» и «высота» в данных утверждениях обозначают численные значения длин соответствующих отрезков.

Теорема. ***Площадь правильного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности.***

Если периметр правильного многоугольника обозначить буквой P, радиус вписанной окружности – r, а площадь правильного многоугольника - S, то, согласно данной теореме, $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} P \cdot r}$.



Доказательство. Разобьем правильный *n*-угольник на *n* треугольников, соединяя отрезками вершины *n*-угольника с центром вписанной окружности . Эти треугольники равны. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}a_n.r$, где a_n - сторона правильного *n*-угольника. Тогда площадь многоугольника равна $\frac{1}{2}a_n.r.\ n$, но $a_n.n$= P. Следовательно, S = $\frac{1}{2}$ P$\cdot$ r.

Если F– произвольный многоугольник, то его площадь находят разбивая многоугольник на треугольники (или другие фигуры, для которых известны правила вычисления площади).

Над этой задачей ученые трудились не один год, потому как верные способы нахождения простейших геометрических фигур были придуманы далеко не сразу. Например, древние вавилоняне считали, что площадь четырехугольника равна произведению полусумм противоположных сторон. Лишь после открытия верной формулы для площади треугольника (а неверных было предостаточно) стало возможным вычислять площадь любого многоугольника, разделив его предварительно, скажем, на треугольники.

В связи с этим возникает *вопрос*: если один и тот же многоугольник поразному разбить на части и найти их площади, то будут ли полученные суммы площадей частей многоугольника одинаковыми?

Ответ: Конечно же, ***всякий многоугольник можно многими способами разрезать на части.*** Доказано, что условиями, сформулированными в определении площади, площадь всякого многоугольника определена однозначно.

Поэтому кроме равенства и равновеликости фигур в геометрии рассматривают отношение равносоставленности. С ним связаны важные свойства фигур.

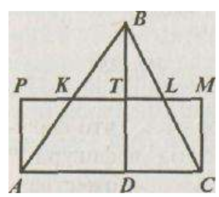
Определение. ***Многоугольники F_1 и F_2 называются равносоставленными, если их можно разбить на соответственно равные части***.

Например, равносоставлены параллелограмм ABCD и прямоугольник FBCE , так как параллелограмм состоит из фигур F_1 и F_2, а прямоугольник - из фигур F_2 и F_3, причем $F_1 = F_3$.

Нетрудно убедиться в том, что ***равносоставленные фигуры равновелики***. Венгерским математиком Ф.Бойяи и немецким любителем математики П.Гервином была доказана *теорема*: ***любые два равновеликих многоугольника равносоставлены***. Другими словами, если два многоугольника имеют равные площади, то их всегда можно представить состоящими из попарно равных частей.

Теорема Бойяи-Гервина служит теоретической базой для решения задач на перекраивание фигур: одну разрезать на части и сложить из нее другую. Оказывается, что если данные фигуры многоугольные и имеют одинаковые площади, то задача непременно разрешима.

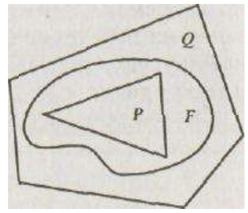
Доказательство теоремы Бойяи-Гервина достаточно сложное. Докажем только утверждение о том, что ***всякий треугольник равносоставлен с некоторым прямоугольником***, т.е. всякий треугольник можно перекроить в равновеликий ему прямоугольник**.**



Пусть дан треугольник ABC . Проведем в нем *высоту BD* и *среднюю линию KL*. Построим прямоугольник, одной стороной которого является AC, а другая лежит на прямой KL. Так как пары треугольников APK и KBT, а также CLM и TBL равны, то треугольник ABC и прямоугольник APMC равносоставлены.

3. Площадь произвольной плоской фигуры и ее измерение

С развитием науки и техники возникла острая потребность вычислять площадь не только многоугольников, но и произвольных фигур. Первые шаги здесь сделали Архимед и итальянский монах Бонавентура Кавальери, а окончательно решили эту проблему И.Ньютон и Г.Лейбниц, создавшие интегральное исчисление, частью которого является и вычисление площадей фигур, ограниченных заданными кривыми. На основе методов интегрирования были сконструированы разнообразные планиметры – приборы, с помощью которых можно измерять площадь фигуры, например, обводя границу этой фигуры специальным указателем.



Пусть F — произвольная плоская фигура. В геометрии считают, что она имеет площадь S(F), если выполняются следующие условия: существуют многоугольные фигуры, которые содержат F (назовем их объемлющими); существуют многоугольные фигуры, которые содержатся в F(назовем их входящими); площади этих многоугольных фигур как угодно мало отличаются от S(F). Поясним эти положения. На рисунке 1 показано, что фигура Q содержит фигуру F, т.е. Q - объемлющая фигура, а фигура P содержится в F, т.е. P - входящая фигура. На теоретико-множественном языке это означает, что $\boldsymbol{P\subset F\subset Q}$ и, следовательно, можно записать, что $\boldsymbol{S(P) \leq S(F) \leq S(Q)}$.

Если разность площадей объемлющей и входящей фигур может стать как угодно малой, то, как установлено в математике, ***существует единственное число S(F), удовлетворяющее неравенству $\boldsymbol{S(P) \leq S(F) \leq S(Q)}$*** для любых многоугольных фигур P и Q. ***Данное число и считают площадью фигуры F.***

Этими теоретическими положениями пользуются, например, когда выводят формулу ***площади круга***. Для этого в круг F радиуса r вписывают правильный n-угольник P, а около окружности описывают правильный n-угольник Q. Если обозначить символами S(Q) и S(P) площади этих многоугольников, то будем иметь, что S(P) ≤ S(F) ≤ S(Q), причем при возрастании числа сторон вписанных и описанных многоугольников площади S(P) будут увеличиваться, оставаясь при этом меньше площади круга, а площади S(Q) будут уменьшаться, но оставаться больше площади круга.

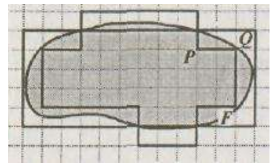
Площадь правильного n-угольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной в него окружности. При возрастании числа его сторон периметр стремится к длине окружности $2\pi r$, а площадь - к площади круга. Поэтому $\mathbf{S_{кр}} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r = \boldsymbol{\pi r^2}$.

<u>Любопытный факт</u>: В настоящее время существует неразрешимая задача под названием «квадратура круга», связанная с построением с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу. Доказано невозможность такого построения (хотя и существуют изящные приближенные способы такого построения).

Для приближенного измерения площадей плоских фигур можно использовать различные приборы, в частности, палетку.

Палетка - это прозрачная пластина, на которой нанесена сеть квадратов. Сторона квадрата принимается за 1, и чем меньше эта сторона, тем точнее можно измерить площадь фигуры.

Накладываем палетку на данную фигуру F. Квадраты, которые целиком лежат внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру P; квадраты, имеющие с фигурой F общие точки и целиком лежащие внутри фигуры F, образуют многоугольную фигуру Q.



Площади S(P) и S(Q) находят простым подсчетом квадратов. За приближенное значение площади фигуры F принимается среднее арифметическое найденных площадей:

$$S(F) = \frac{S(Q)+S(P)}{2}.$$

В начальном курсе математики учащиеся измеряют площади фигур с помощью палетки таким образом: подсчитывают число квадратов, которые лежат внутри фигуры F, и число квадратов, через которые проходит контур фигуры; затем второе число делят пополам и прибавляют к первому. Полученную сумму считают площадью фигуры F.

Нетрудно обосновать эти действия. Пусть m - число квадратов, которые поместились внутри фигуры F, а n– число квадратов, через которые проходит контур фигуры F. Тогда

S(P) = m, а S(Q) = $m + n$.

И значит, S(F) = $\frac{m+(m+n)}{2} = \frac{2m+n}{2} = m + \frac{n}{2}$.

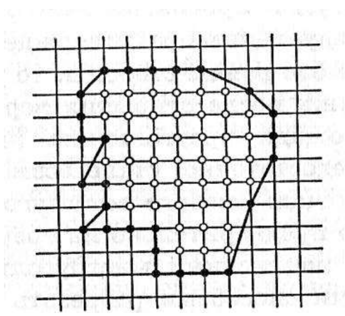
Палетка позволяет измерить площадь фигуры F с определенной точностью. Чтобы получить более точный результат, нужно взять палетку с более мелкими квадратами. Но можно поступить иначе: наложить одну и ту же палетку на фигуру по-разному и найти несколько приближенных значений площади фигуры F. Их среднее арифметическое может быть лучшим приближением к численному значению площади фигуры F.

Такой способ оценки площади лежит в основе современного понятия площади произвольной фигуры: площадью называется предел, к которому стремятся полученные величины, если брать палетки со все более мелкими клетками, в случае, если такой предел существует.

Любопытный факт: площадь многоугольника, все вершины которого лежат в узлах квадратной сетки, выражается формулой (формулой Пика):

$$S = n + \frac{m}{2} - 1,$$

где n– количество узлов сетки, лежащих внутри многоугольника, а m – количесво узлов сетки, лежащих на его границе (в частности, в вершинах).



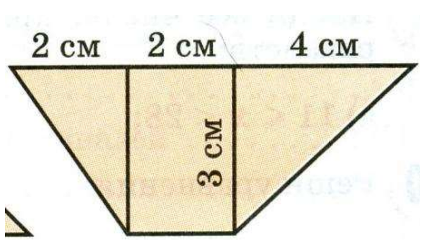
Вывод – итог: такие величины как длина, площадь, величина угла характеризуются одинаковыми свойствами, но заданы на разных классах фигур: длина – на множестве отрезков, величина угла – на множестве углов, площадь – на множестве фигур (многоугольных и криволинейных).

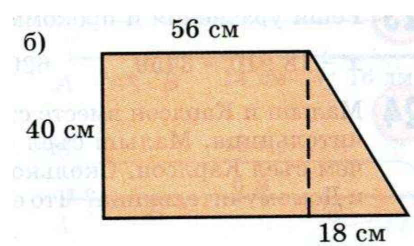
Рассмотрели:

- косвенные способы вычисления площадей прямоугольника, треугольника, параллелограмма, произвольного многоугольника,
- взаимосвязь равновеликости и равносоставленности многоугольных фигур,
- обосновали способ измерения площади фигуры при помощи палетки.

Задание из учебника Математики 3 класс автора Петерсон Л.Г. для самостоятельной работы

Вычислите площадь фигуры





Результат выразите в квадратных дециметрах

Тема: «Объём, масса тела. Промежутки времени. Другие величины, рассматриваемые в начальном курсе математики»

План:

1. ***Объём тела и его измерение***
2. ***Масса тела и ее измерение***
3. ***Промежутки времени и их измерение.***
4. ***Другие величины, изучаемые в начальном курсе математики. Зависимости между величинами***

Объём тела и его измерение.

Понятие объёма определяется так же, как понятие площади. Но при рассмотрения понятия площадь, мы рассматривали многоугольные фигуры, а при рассмотрении понятия объём мы будем рассматривать многогранные фигуры. *Объем характеризует вместимость*.

Определение. ***Объёмом фигуры называется неотрицательная величина, определённая для каждой фигуры так, что:***

1) равные фигуры имеют один и тот же объём;

2) если фигура составлена из конечного числа фигур, то её объём равен сумме их объёмов.

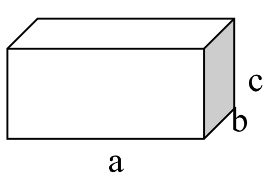
Условимся объём фигуры F обозначать *V(F).*

Чтобы измерить объем фигуры, нужно иметь единицу объёма. Как правило, за единицу объёма принимают объём куба с гранью, равной единичному отрезку, то есть отрезку, выбранному в качестве единицы длины.

Измерение объёма данной фигуры состоит в сравнении его с объёмом единичного куба. Результатом этого сравнения является число V(x).
Число V(x) называют численным значением объёма при выбранной единице объёма.

На практике для измерения объемов применяют следующие единицы: мм^3, см^3, дм^3, м^3, км^3. Литр –это кубический дециметр.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений (длины, ширины и высоты).



$$V = a \cdot b \cdot c$$

На Руси в старину использовались в качестве единиц измерения объема ведро (около 12 л), штоф (десятая часть ведра). В США, Англии и других странах используются баррель (около 159 л), галлон (около 4 л), бушель (около 36 л), пинта (от 470 до 568 кубических сантиметров).

Масса тела и ее измерение

Масса – одна из основных физических величин. Понятие массы тела связано с понятием веса – силы, с которой тело притягивается Землей. Поэтому вес тела зависит не только от самого тела. Например, он различен на различных широтах: на полюсе тело весит на 0,5% больше, чем на экваторе. Однако при своей изменчивости вес обладает особенностью: отношение весов двух тел в любых условиях остается неизменным. При измерении веса тела путем сравнения его с весом другого выявляется новое свойство тел, которое называется массой.

Для сравнения двух предметов по массе их взвешивают. Если чаши весов уравновешиваются, то предметы имеют одинаковую массу, если же чаши не уравновешены, то предмет, находящийся на той чаше, которая перетягивает, имеет большую массу, второй предмет – меньшую.

Если тело взвесили на рычажных весах на экваторе, а затем тело и гири перенесли на полюс, то взвешивание на полюсе даст тот же результат, что на экваторе, поскольку и тело и гири изменят свой вес одинаково. Таким образом, масса тела не изменяется, она одна и та же, где бы тело ни находилось.

Определение. ***Масса- это такая положительная величина, которая обладает свойствами:***
1)масса одинакова у тел, уровновешивающих друг друга на весах,
2)масса складывается, когда тела соединяются вместе: масса нескольких тел, вместе взятых, равна сумме их масс.

Если сравнить данное определение массы с определениями длины и площади, то увидим, что масса характеризуется теми же свойствами, что и длина и площадь, но задана она на множестве физических тел.

Измерение массы производится с помощью весов. Происходит это следующим образом. Выбираем тело *e*, масса которого принимается за единицу. Предпологается, что можно взять и доли этой массы. Например, если за единицу массы взять килограмм, то в процессе измерения можно использоиать и такую же его долю, как грамм: $1г = \frac{1}{1000}$ кг.

На одну чашу весов кладут тело, массу которого измеряют, а на другую– тела, выбранные в качестве единицы массы, т.е. гири. Этих гирь должно быть столько, чтобы они уровновесили первую чашку весов. В результате взвешивания получается численное значение массы данного тела при выбраной единице массы. Это значение приближенное. Например, если масса тела равна 5 кг 350 г, то число 5350 следует рассматривать как приближенное значение массы данного тела.

Для численных значений массы справедливы все утверждения, сформулированные для длины, т.е. сравнение масс, действия над ними сводятся к сравнению и действиям над численными значениями масс.

Основная единица массы– килограмм. Из этой основной единицы образуются другие единицы массы: грамм, тонна и пр.